MA2115 Clase 15: Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Elaborado por los profesores
Edgar Cabello y Marcos González

Trataremos las ecuaciones diferenciales simultáneas de primer orden de varias variables:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases} \tag{1}$$

Una solución de (1) consiste en n funciones $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, tales que

$$\frac{dx_j}{dt}(t) = f_j(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)),$$

para cada $j = 1, 2, \ldots, n$.

Por ejemplo, para el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} &= 1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} &= 2x_1, \end{cases}$$

se tiene la solución $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t^2$.

Generalmente se imponen condiciones iniciales sobre $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ de la forma

$$x_1(t_0) = x_1^0,\ x_2(t_0) = x_2^0, \ldots,\ x_n(t_0) = x_n^0.$$

Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} &= x_1, \quad x_1(0) = 1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} &= x_2^2, \quad x_2(0) = \frac{3}{2}, \end{cases}$$

tiene por solución $x_1(t) = e^t$, $x_2(t) = \dfrac{3}{2 - 3t}$.

1 Sistemas de ecuaciones lineales de primer orden

Un sistema de ecuaciones lineales de primer orden tiene la forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} & = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + g_1(t), \\ \dfrac{dx_2}{dt} & = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + g_2(t), \\ & \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} & = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + g_n(t). \end{cases} \tag{2}$$

Si $g_1, g_2, \ldots, g_n$ son todas iguales a cero, el sistema se llama homogéneo.

El sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} & = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ \dfrac{dx_2}{dt} & = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ & \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} & = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n, \end{cases}$$

se puede escribir en forma matricial: $\vec{x}' = A\vec{x}$, donde

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \vec{x}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

debido a que, usando el producto de matrices, se tiene que

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 1 *Verificar que los vectores*

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}; \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t},$$

son soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}(t).$$

Solución: Como $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$ se tiene que $\vec{x}_1' = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix}$. Como $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, entonces

$$A\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} - 3e^{-2t} \\ 5e^{-2t} - 3e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix} = \vec{x}_1'.$$

Por otro lado, $\vec{x}_2' = \begin{pmatrix} 18e^{6t} \\ 30e^{6t} \end{pmatrix}$. Ahora,

$$A\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{6t} + 15e^{6t} \\ 15e^{6t} + 15e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18e^{6t} \\ 30e^{6t} \end{pmatrix} = \vec{x}_2'.$$

Definicion 1 *Sea t_0 un punto en el intervalo I, sean*

$$\vec{x}(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix}; \qquad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix},$$

donde $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son constantes. Entonces, el problema

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} + F(t),$$

sujeto a $x(t_0) = x_0$, es el problema de valor inicial.

2 Principio de Superposición

Sea $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ un conjunto de vectores solución del sistema homogéneo $\vec{x}'(t) = A(t)\vec{x}(t)$ en un intervalo I. Entonces, la combinación lineal $\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n$ donde los c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, son constantes arbitrarias, tambien es solución.

Ejemplo 2 *Una solución del sistema $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$ está dada por la función vectorial $x_1 = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$. Entonces, para cualquier constante c_1, el vector $\vec{x} = c_1\vec{x}_1$ también es solución, ya que*

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -c_1 \operatorname{sen} t \\ \frac{c_1}{2}\operatorname{sen} t + \frac{c_1}{2}\operatorname{sen} t \\ c_1 \cos t - c_2 \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

y

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \cos t \\ -\frac{c_1}{2}\cos t + \frac{c_1}{2}\operatorname{sen} t \\ -c_1 \cos t - c_1 \operatorname{sen} t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 \operatorname{sen} t \\ \frac{c_1}{2}\operatorname{sen} t + \frac{c_1}{2}\operatorname{sen} t \\ c_1 \cos t - c_2 \operatorname{sen} t \end{pmatrix}.$$

3 Teorema de Existencia y Unicidad

Teorema 1 *Si $\vec{A}(t)$ y $\vec{G}(t)$ son funciones en un cierto intervalo abierto I que contiene a t_0, entonces existe una única solución $\vec{Y}(t)$ definida en I, del problema*

$$X' = A\vec{X} + \vec{G}; \qquad x(t_0) = B.$$

Definicion 2 *Un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ de un espacio vectorial V, sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) se dice* linealmente independiente *(l.i.), si*

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_n\vec{v}_n = 0, \quad \text{con } c_i \in \mathbb{K},$$

implica que $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$. Un conjunto de vectores que no es linealmente independiente se dice linealmente dependiente.

Ejemplo 3 *Estudiar la dependencia lineal entre los vectores $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.*

Solución: Queremos determinar si los vectores son linealmente independientes o no. Para esto, sean c_1, c_2 y c_3 escalares tales que $c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + c_3\vec{x}_3 = 0$, es decir,

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Efectuando las operaciones vectoriales y luego comparando los coeficientes de los vectores resultantes en ambos miembros, obtenemos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 3c_3 &= 0, \\ -c_1 + 2c_2 &= 0, \\ c_1 + 3c_2 + 5c_3 &= 0. \end{cases}$$

Como este sistema de ecuaciones tiene soluciones no triviales tales como $c_1 = -1$, $c_3 = 1$, $c_1 = -2$, tenemos que los vectores son linealmente dependientes.

Teorema 2 *Sean $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ soluciones del sistema homogéneo $\vec{x}' = A\vec{x}$, siendo $A = A(t)$ una función a valores matrices $n \times n$, la cual es continua en el intervalo I y sea V_A el espacio de soluciones del sistema. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

i) El conjunto $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ es linealmente dependiente en V_A.

ii) Para cada t_0 en I, $\{\vec{x}_1(t_0), \vec{x}_2(t_0), \ldots, \vec{x}_n(t_0)\}$ es linealmente dependiente en $\mathbb{R}^n$.

iii) Existe t_0 en I tal que $\{\vec{x}_1(t_0), \vec{x}_2(t_0), \ldots, \vec{x}_n(t_0)\}$ es linealmente dependiente en $\mathbb{R}^n$.

Demostración:

i) $\Rightarrow$ ii) Existen $c_1, \ldots, c_n$ en $\mathbb{R}$, no todos nulos, tales que $\sum_{i=1}^{n} c_i \vec{x}_i = 0$. Entonces, para cualquier t_0 en I se cumple que $\sum_{i=1}^{n} c_i \vec{x}_i(t_0) = 0$ en $\mathbb{R}^n$. Así, $\{\vec{x}_1(t_0), \ldots, \vec{x}_n(t_0)\}$ es linealmente dependiente en $\mathbb{R}^n$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Es inmediato.

iii) $\Rightarrow$ i) De acuerdo a nuestras hipótesis, existen $c_1, \ldots, c_n$ en $\mathbb{R}$, no todos nulos, tales que $\sum_{i=1}^{n} c_i \vec{x}_i(t_0) = 0$. En otras palabras, la función $\sum_{i=1}^{n} c_i \vec{x}_i$, es solución del problema a valores iniciales $\vec{x}' = A\vec{x}$, $\vec{x}(t_0) = 0$. Como $\vec{x} \equiv 0$ también es una solución de dicho problema, en virtud de la unicidad de la solución debemos tener que

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \vec{x}_i = 0,$$

como función sobre I.

Corolario 1 *Sean $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$, soluciones del sistema $\vec{x}' = A\vec{x}$, siendo $A = A(t)$ una función a valores matrices de tamaño $n \times n$, continua en un intervalo abierto I. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes*

i) *$\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ es linealmente independiente en V_A.*

ii) *Existe t_0 en I tal que $\{\vec{x}_1(t_0), \ldots, \vec{x}_n(t_0)\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$.*

iii) *Para cada t_0 en I, $\{\vec{x}_1(t_0), \ldots, \vec{x}_n(t_0)\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$.*

Definicion 3 *Sea $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$, un conjunto linealmente independiente cualquiera de vectores solución del sistema homogéneo $\vec{x}'(t) = A(t)\vec{x}(t)$, en un intervalo I. Entonces diremos que $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$, es un* conjunto fundamental de soluciones *en el intervalo I.*

Teorema 3 *El sistema $\vec{x}'(t) = A(t)\vec{x}(t)$ tiene un conjunto fundamental de soluciones en um intervalo I.*

Definicion 4 *Sea $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$, un conjunto fundamental de soluciones del sistema $\vec{x}'(t) = A(t)\vec{x}(t)$, en el intervalo I.* La solución general del sistema *se define como*

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n,$$

donde $c_i \in \mathbb{R}$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, son constantes.

Definicion 5 *Sea $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$ un conjunto en $\mathbb{R}^n$. Si se denota $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ a la matriz cuya columna i-ésima es $\vec{x}_i$, entonces se define el* Wronskiano *de los n vectores $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$, como*

$$W(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = \det(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n).$$

Teorema 4 *Sea $A = A(t)$ una matriz $n \times n$, continua en un intervalo abierto I y sean $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ pertenecientes a V_A. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes*

i) $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$ *es linealmente independiente en* V_A.

ii) Para cada t_0 *en* I, $W(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)(t_0) \neq 0$.

iii) Existe t_0 *en* I *tal que* $W(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)(t_0) \neq 0$.

Ejemplo 4 *Verificar que los vectores*

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2e^t \\ 2e^t \\ e^t \end{pmatrix}; \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2e^{3t} \\ 0 \\ -e^{3t} \end{pmatrix}; \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2e^{5t} \\ -2e^{5t} \\ e^{5t} \end{pmatrix}$$

forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

Solución: El lector puede verificar que cada uno de los vectores es en efecto una solución. Para establecer que es un conjunto fundamental es necesario demostrar que son linealmente independientes: el Wronskiano de dichas soluciones es:

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2, x_3) &= \begin{vmatrix} 2e^t & 2e^{3t} & 2e^{5t} \\ 2e^t & 0 & -2e^{5t} \\ e^t & -e^{3t} & e^{5t} \end{vmatrix} = e^{9t} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= e^{9t} \left(-2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = -16e^{9t}. \end{aligned}$$

(El determinante se calculó reduciendo a través de la segunda fila). Ahora se observa que $W(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = -16e^{9t} \neq 0$, lo cual nos dice que los vectores son en efecto linealmente independientes.

Ejemplo 5 *Verificar que los vectores*

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) \\ -\cos(t) - \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}; \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t; \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(t) \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) - \frac{1}{2}\cos(t) \\ -\operatorname{sen}(t) + \cos(t) \end{pmatrix}$$

forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

Solución: Se tiene que

$$\begin{aligned}
W(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3) &= \begin{vmatrix} \cos(t) & 0 & \operatorname{sen}(t) \\ -\dfrac{1}{2}\cos(t)+\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}(t) & e^t & -\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}(t)-\dfrac{1}{2}\cos(t) \\ -\cos(t)-\operatorname{sen}(t) & 0 & -\operatorname{sen}(t)+\cos(t) \end{vmatrix} \\
&= e^t \begin{vmatrix} \cos(t) & \operatorname{sen}(t) \\ -\cos(t)-\operatorname{sen}(t) & -\operatorname{sen}(t)+\cos(t) \end{vmatrix} \\
&= e^t\left(\cos(t)\left(-\operatorname{sen}(t)+\cos(t)\right)-\operatorname{sen}(t)\left(-\cos(t)-\operatorname{sen}(t)\right)\right) \\
&= e^t\left(-\cos(t)\operatorname{sen}(t)+\cos^2(t)+\operatorname{sen}(t)\cos(t)+\operatorname{sen}^2(t)\right) = e^t \neq 0.
\end{aligned}$$

Se concluye que $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3$ forman un conjunto fundamental de soluciones. La solución general del sistema es $\vec{x}=c_1\vec{x}_1+c_2\vec{x}_2+c_3\vec{x}_3$.

Ejemplo 6 *Demostrar que los vectores $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3$, definidos por*

$$\vec{x}_1=\begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}; \quad \vec{x}_2=\begin{pmatrix} e^{3t} \\ -2e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix}; \quad \vec{x}_3=\begin{pmatrix} 3e^{5t} \\ -6e^{5t} \\ -2e^{5t} \end{pmatrix},$$

forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación

$$\vec{x}'=\begin{pmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -10 & 4 & -12 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\vec{x}.$$

Solución: Se tiene que

$$W(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)=\begin{vmatrix} e^{2t} & e^{3t} & 3e^{5t} \\ -e^{2t} & -2e^{3t} & -6e^{5t} \\ -e^{2t} & -e^{3t} & -2e^{5t} \end{vmatrix} = -e^{10t}\neq 0,$$

y, en consecuencia, los vectores $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3$ son linealmente independientes. Así, la solución general del sistema es $\vec{x}=c_1\vec{x}_1+c_2\vec{x}_2+c_3\vec{x}_3$.

Ejemplo 7 *Demuestre que las soluciones $\vec{x}_1(t),\vec{x}_2(t),\vec{x}_3(t)$ dadas por*

$$\vec{x}_1=\begin{pmatrix} -4e^{t} \\ e^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix}; \quad \vec{x}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ -e^{3t}\operatorname{sen}(2t) \\ e^{3t}\cos(2t) \end{pmatrix}; \quad \vec{x}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t}\cos(2t) \\ e^{3t}\operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix}$$

son linealmente independientes.

Solución: Se tiene que

$$W(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)=\det\begin{pmatrix} -4e^{t} & 0 & 0 \\ e^{t} & -e^{3t}\operatorname{sen}(2t) & e^{3t}\cos(2t) \\ e^{t} & e^{3t}\cos(2t) & e^{3t}\operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix} = -4e^{t}\begin{vmatrix} -e^{3t}\operatorname{sen}(2t) & e^{3t}\cos(2t) \\ e^{3t}\cos(2t) & e^{3t}\operatorname{sen}(2t) \end{vmatrix} = 4e^{7t}\neq 0.$$

Ejemplo 8 *Dadas las funciones*

$$\vec{y}_1(t) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix}; \quad \vec{y}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ e^x \end{pmatrix}.$$

a) *¿Pueden estas funciones formar un sistema fundamental de soluciones para un sistema lineal $\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x)$, con $A(x)$ continua sobre un intervalo abierto? Si su respuesta es afirmativa, indique cuál es dicho intervalo. En cualquier caso, justifique su respuesta.*

b) *Halle $A(x)$.*

Solución: a) Como

$$W(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & e^x \end{vmatrix} = e^x e^x - e^x e^{-x} = e^{2x} - 1$$

es distinto de cero si, y sólo si, $e^{2x} \neq 1$ si, y sólo si, $x \neq 0$, las columnas forman un sistema fundamental de soluciones en todo $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, y podemos elegir el intervalo igual a $(0, \infty)$ ó $(-\infty, 0)$.

b) Sea $A(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Substituyendo $\vec{y}_1$ en $\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x)$, obtenemos

$$\begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix};$$

es decir,

$$\begin{cases} e^x &= a_{11}e^x + a_{12}e^x \\ e^x &= a_{21}e^x + a_{22}e^x, \end{cases}$$

con lo cual

$$a_{11} + a_{12} = 1, \tag{3}$$
$$a_{21} + a_{22} = 1. \tag{4}$$

Por otra parte, substituyendo $\vec{y}_2$ en $\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x)$, obtenemos

$$\begin{pmatrix} -e^{-x} \\ e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-x} \\ e^x \end{pmatrix};$$

es decir,

$$\begin{cases} -e^{-x} &= a_{11}e^{-x} + a_{12}e^x \\ e^x &= a_{21}e^{-x} + a_{22}e^x, \end{cases}$$

con lo cual

$$a_{11} + a_{12}e^{2x} = -1, \tag{5}$$
$$a_{21} + a_{22}e^{2x} = e^{2x}. \tag{6}$$

Ahora bien, usando las ecuaciones (3) y (5) tenemos que

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} &= 1 \\ a_{11} + a_{12}e^{2x} &= -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a_{11} - a_{12} &= -1 \\ a_{11} + a_{12}e^{2x} &= -1, \end{cases}$$

de donde $(e^x-1)a_{12}=-2$, y así, $a_{12}=\dfrac{-2}{e^x-1}$, para $x\neq 0$. Por lo tanto,

$$a_{11}=1-a_{12}=1+\frac{2}{e^x-1}=\frac{e^x-1+2}{e^x-1}=\frac{e^x+1}{e^x-1}.$$

Es decir, $a_{11}=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$. Por otra parte, usando las ecuaciones (4) y (6), tenemos que

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{21}+a_{22} & = & 1\\ a_{21}+a_{22}e^{2x} & = & e^{2x}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -a_{21}-a_{22} & = & -1\\ a_{21}+a_{22}e^{2x} & = & e^{2x},\end{array}\right.$$

de donde, $a_{22}\left(e^{2x}-1\right)=e^{2x}-1$, es decir, $a_{22}=1$ (si $x\neq 0$) y $a_{21}=1-a_{22}=1-1=0$. En suma, obtenemos la matriz

$$A(x)=\begin{pmatrix} \dfrac{e^x+1}{e^x-1} & \dfrac{-2}{e^x-1}\\ & \\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Ejemplo 9 *Halle el conjunto fundamental de soluciones del sistema*

$$\vec{x}'=\begin{pmatrix} 1/t & 0\\ 1 & -t\end{pmatrix}\vec{x}. \tag{7}$$

Solución: Substituyendo $\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}$, en la ecuación 7, obtenemos

$$\begin{pmatrix} x_1'\\ x_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/t & 0\\ 1 & -t\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{x_1}{t}\\ x_1-tx_2\end{pmatrix}.$$

Es decir, $x_1'=\dfrac{x_1}{t}$ y $x_2'=x_1-tx_2$. Podemos resolver la primera de estas ecuaciones, ya que es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{x_1}{t}\Rightarrow\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dt}{t}\Rightarrow\ln|x_1|=\ln|C_1t|\Rightarrow x_1=C_1t.$$

Ahora bien, substituyendo este resultado en la segunda ecuación, se tiene que

$$\begin{aligned} x_2'=x_1-tx_2=C_1t-tx_2 &\Rightarrow \frac{dx_2}{dt}=(C_1-x_2)t\Rightarrow\frac{dx_2}{C_1-x_2}=tdt\\ &\Rightarrow -\ln|C_1-x_2|=\frac{t^2}{2}+K_2\Rightarrow C_1-x_2=B_2e^{-t^2/2}\\ &\Rightarrow x_2=C1+C_2e^{-t^2/2}.\end{aligned}$$

En suma,

$$\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1t\\ C1+C_2e^{-t^2/2}\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} t\\ 1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} 0\\ e^{-\frac{t^2}{2}}\end{pmatrix}.$$

Observemos ahora que

$$W\left(\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\frac{t^2}{2}} \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} t & 0 \\ 1 & e^{-\frac{t^2}{2}} \end{vmatrix} = te^{-\frac{t^2}{2}} \neq 0, \text{ si } t \neq 0.$$

Por lo tanto, $\left\{\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\frac{t^2}{2}} \end{pmatrix}\right\}$ son linealmente independientes y forman un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación (7).

Correcciones: Boris Iskra

May 13, 2008